fondation SCIENCES MATHÉMATIQUES de PARIS

L'abstraction utile :
les mathématiques fondamentales

**Gilles Godefroy, Directeur de recherche, CNRS, IMJ**

**Les mathématiques fondamentales peuvent être perçues comme trop abstraites, déconnectées du réel. Pourtant, de ces recherches abstraites sont nées, parfois plusieurs siècles plus tard, des applications aujourd'hui indispensables à notre quotidien.**

Les mathématiques constituent depuis des siècles le langage de la physique, elles ont récemment conquis la médecine et les sciences de la vie et plus récemment encore l'économie et la finance. Elles sont donc un outil de modélisation polyvalent, pour ne pas dire universel. Mais si les sollicitations externes sont un facteur crucial de leur évolution, elles progressent également par l'effet d'un moteur interne, d'une volonté de comprendre entièrement les techniques de calcul, les méthodes de preuves et finalement les objets mathématiques eux-mêmes : formes, nombres et transformations. Cet approfondissement théorique est souvent qualifié de mathématique pure. Parlons plutôt de « mathématiques fondamentales », puisque la démarche abstraite concerne tout aussi bien les applications. Comment décrire cette démarche ?

L'objectif des mathématiques fondamentales est de s'élever, de synthèse en synthèse, jusqu'à fournir le point de vue qui embrasse d'un coup des notions qu'on aurait pu croire étrangères. Illustrons cela par un exemple historique : la classification des trinômes du second degré, obtenue par Al-Khawarizmi au IX$^{e}$ siècle, a réuni sous une seule équation polynomiale de nombreux problèmes géométriques. Puis, l'analyse de la résolution par radicaux des équations polynomiales a conduit Galois au XIX$^{e}$ siècle à subordonner l'étude de ces équations à celles des groupes finis. Enfin, la classification des groupes finis a été terminée à la fin du XX$^{e}$ siècle...Voici un progrès conceptuel (inachevé, bien sûr, puisque ce qui importe à présent est de comprendre les isomorphismes entre groupes) qui s'appuie naturellement sur un recours à plusieurs niveaux d'abstraction.

## Des mathématiques utiles

Cette démarche conceptuelle a-t-elle conduit à des applications? Reprenons notre exemple. Les trinômes du second degré ont ouvert la voie vers l'univers quadratique, qui s'étend du théorème de Pythagore à l'espace de Hilbert, en passant par la méthode des moindres carrés, l'analyse de Fourier et la modélisation du mouvement Brownien. La théorie de Galois a permis de comprendre l'universalité du concept de symétrie, de l'algèbre à la cristallographie en passant par les polyèdres réguliers et leurs analogues en dimension supérieure. Elle a également fourni de nouveaux exemples naturels d'énoncés dont les mathématiques ont le secret : les théorèmes d'impossibilité.

Les groupes finis ont quant à eux fourni des méthodes de codage que nous employons chaque fois que nous effectuons une transaction sécurisée : ils permettent ainsi à la société de puiser dans le réservoir de complexité effectivement inépuisable que lui fournissent les mathématiques. Galois aurait-il rêvé cela? Nul ne le sait. Mais son contemporain Cauchy écrivait déjà en 1827 que le système binaire permettrait la construction de machines à calculer électriques.

Les mathématiques prennent donc bien souvent de la hauteur, tant et si bien qu'on pourrait les perdre un peu de vue. Mais l'un de leurs ambitions, aujourd'hui comme hier, est aussi d'être utiles voire nécessaires.

*Fondation SMP - IHP - 11 rue Pierre et Marie Curie - F- 75231 Paris Cedex 05 - Tél. : +33 (0)1 44 27 67 72 – Fax : +33 (0)1 44 27 67 71*
*Mél. : Communication.FondationSMP@ihp.jussieu.fr – Site Internet : http://www.sciencesmath-paris.fr*